Tentamen Analyse op Variëteiten
29 juni 2009, 9:00-12:00 uur.

Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven. Per opgave is het maximaal aantal te behalen punten aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

Exercise 1 (25 pt.)

We identificeren de ruimte $M(2,\mathbb{R})$ van reële 2×2-matrices met $\mathbb{R}^4$ door de matrix $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ te laten corresponderen met $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \mathbb{R}^4$. Laat E de eenheidsmatrix zijn, gegeven door $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Bewijs dat de verzameling $SO(2,\mathbb{R})$ van orthogonale matrices, gegeven door
$$SO(2,\mathbb{R}) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid A^T A = E\},$$
een deelvariëteit is van $M(2,\mathbb{R})$. Hierbij is A^T de getransponeerde van de matrix A. Wat is de dimensie van $SO(2,\mathbb{R})$?
Aanwijzing: vertaal elke uitspraak in termen van deelverzamelingen van $\mathbb{R}^4$.

2. Toon aan dat de raakruimte $T_E\,SO(2,\mathbb{R})$ in E gelijk is aan de ruimte van scheefsymmetrische 2×2-matrices, d.w.z., $T_E\,SO(2,\mathbb{R}) = \{X \in M(2,\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$.

3. De afbeelding $f : SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$ is gegeven door $f(X) = X^{-1}$. Deze afbeelding is differentiëerbaar (dat is gegeven). Voor $D_E f : T_E\,SO(2,\mathbb{R}) \to T_E\,SO(2,\mathbb{R})$ geldt $D_E f(X) = -X$. Toon dit aan.
Aanwijzing: voor elke $X \in T_E\,SO(2,\mathbb{R})$ is er een $\xi \in \mathbb{R}$ met $X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}$. Voor $\xi \neq 0$ is $c : \mathbb{R} \to SO(2,\mathbb{R})$, gegeven door $c(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\xi^2}} \begin{pmatrix} 1 & t\xi \\ -t\xi & 1 \end{pmatrix}$, een kromme met X als raakvector in $c(0) = E$.

Exercise 2 (20 pt.)

Beschouw $\mathbb{R}^3$ met coördinaten x_1, x_2, x_3 (eigenlijk: coördinaatfuncties $x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Voor een vectorveld $X = X_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ op $\mathbb{R}^3$ is $\eta(X)$ gegeven door
$$\eta(X) = x_1 X_2 + x_2 X_3 + x_3 X_1.$$
Daarmee is dus een afbeelding $\eta : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeven.

1. Toon aan dat η een 1-vorm is, en dat $\eta = x_3\, dx_1 + x_1\, dx_2 + x_2\, dx_3$.

2. Bereken $\omega = \eta \wedge d\eta$.

3. Toon aan dat ω exact is, en bepaal een 2-vorm σ zodanig dat $\omega = d\sigma$.

Z.O.Z.

Exercise 3 (20 pt.)
Laat $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ de standaard volumevorm zijn op $\mathbb{R}^3$. Zoals bekend is de divergentie van een vectorveld X op $\mathbb{R}^3$ gedefiniëerd door $d(\iota_X \Omega) = (\operatorname{div} X)\,\Omega$. Bewijs:

1. Als X een glad vectorveld is op $\mathbb{R}^3$ met $\operatorname{div} X = 0$, dan is er een vectorveld Y op $\mathbb{R}^3$ met $X = \nabla \times Y$. (M.a.w., $X = \operatorname{rot} Y$.)

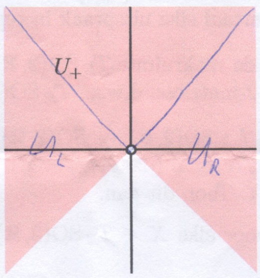
2. Als X een glad vectorveld is op $\mathbb{R}^3$ met $\nabla \times X = 0$, dan is er een gladde functie f op $\mathbb{R}^3$ met $X = \operatorname{grad} f$ (de gradiënt van f).

Exercise 4 (25 pt.)
Op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ is de 1-vorm ω_0 gegeven door $\omega_0 = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$.

1. Toon aan dat $\int_{\mathbb{S}^1} \omega_0 \neq 0$.

2. Toon aan dat voor een exacte 1-vorm ω op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ geldt: $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$.

3. Toon nu het omgekeerde aan: als voor een gesloten 1-vorm ω op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ geldt dat $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$, dan is ω exact.



Figuur 1: Het gebied U_+.

Schets van een mogelijk bewijs (als je dit gebruikt, vul dan de ontbrekende stappen in): laat U_+ het gebied zijn in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bestaande uit de punten die liggen boven tenminste één van de lijnen $y = x$ en $y = -x$; zie figuur 1. Het gebied U_- ontstaat bij spiegeling van U_+ in de x-as. Laat $\omega_\pm$ de beperkingen zijn van ω tot $U_\pm$. Toon aan dat $\omega_\pm$ exacte 1-vormen zijn op $U_\pm$, en dus dat er functies $f_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$ bestaan met $\omega_\pm = df_\pm$. Laat U_L en U_R de samenhangscomponenten zijn van $U_- \cap U_+$ die de negatieve resp. de positieve x-as bevatten. Dan geldt: $f_+ - f_-$ is constant op U_R, zeg $f_+(p) - f_-(p) = c_R \in \mathbb{R}$ voor $p \in U_R$; evenzo is er een $c_L \in \mathbb{R}$ met $f_+(q) - f_-(q) = c_L$ voor $q \in U_L$. Toon aan dat $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = c_L - c_R$, en maak het bewijs af.

4. Toon aan dat voor elke gesloten 1-vorm op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $\omega - c\omega_0$ exact is.

2